ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2008

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

1ο ΘΕΜΑ

Αν $f^2(x) + g^2(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, για κάθε $x \in R$ και οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=1$, να δείξετε ότι $[f'(1)]^2 + [g'(1)]^2 = 4$.

2ο ΘΕΜΑ

Έστω f παραγωγίσιμη στο R με f(1)=2 και για κάθε $x \in R$ ισχύει $f(x^2) = f(x)$, να υπολογιστεί το $\lim_{x\to 1} \frac{x\,f(x) - 2}{x - 1}$

3ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x>0$

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της Cf που διέρχεται από την αρχή των αξόνων
β) Εάν η εφαπτομένη τέμνει την γραφική της f σε δύο σημεία Μ(α,f(α)) και Ν (β, f(β)). Δείξτε ότι $\alpha^{\beta^2} = \beta^{\alpha^2}$

4ο ΘΕΜΑ

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και υποθέτουμε ότι για κάθε $x, y \in R^*$ ισχύει
$f(x\cdot y) = f(x) + f(y) + \alpha(x-1)(y-1)$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in R^*$

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Αφού $f^2(x) + g^2(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ για κάθε $x \in R$, για x=1 έχουμε: $f^2(1)+g^2(1)=0$ άρα $f(1)=g(1)=0$
Επίσης $\left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}\right)^2 + \left(\frac{g(x) - g(1)}{x - 1}\right)^2 = \frac{f^2(x)}{(x-1)^2} + \frac{g^2(x)}{(x-1)^2} =$

$$= \frac{f^2(x) + g^2(x)}{(x-1)^2} = \frac{(x^2-1)^2}{(x-1)^2} = (x+1)^2$$

Οπότε $[f'(1)]^2 + [g'(1)]^2 =$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}\right)^2 + \left(\frac{g(x) - g(1)}{x - 1}\right)^2\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1} (x+1)^2 = 4$$

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Έστω g(x)=x f(x) τότε για x=1 έχουμε g(1)=f(1)=2 άρα

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\,f(x) - 2}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1)$$

Όμως g παραγωγίσιμη στο R ως γινόμενο παραγωγίσιμων άρα $g'(x) = (x\,f(x))' = (x)'\,f(x) + x\,f'(x) = f(x) + x\,f'(x)$

Για x=1: $g'(1) = f(1) + f'(1)$

Επίσης $f(x^2)=f(x)$ οπότε
$(f(x^2))' = (f(x))' \Leftrightarrow f'(x^2)\cdot 2x = f'(x)$ και για x=1 έχουμε

$f'(1)\cdot 2 = f'(1) \Leftrightarrow f'(1) = 0$, και τελικά

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\,f(x) - 2}{x - 1} = g'(1) = f(1) + f'(1) = 2$$

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με
$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

Έστω (ε) η εφαπτομένη της Cf στο $A(x_0, f(x_0))$.
Η εξίσωση της είναι :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot (x - x_0) \Leftrightarrow y - \frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2}\cdot (x - x_0)$$

Αφού 0 $(0,0) \in (\varepsilon)$ άρα

$$0 - \frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2}\cdot (0 - x_0) \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0 = \sqrt{e}$$

Οπότε η (ε): $y = \frac{1}{2e}x$

β) Αφού η (ε) τέμνει την Cf σε δύο σημεία Μ (α, f(α)) , Ν(β, f(β)) θα είναι

$\frac{\ln\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha}{2e} \Leftrightarrow 2e = \frac{2}{\ln\alpha}$ και $\frac{\ln\beta}{\beta} = \frac{\beta}{2e} \Leftrightarrow 2e = \frac{\beta^2}{\ln\beta}$

Οπότε

$$\frac{\alpha^2}{\ln\alpha} = \frac{\beta^2}{\ln\beta} \Leftrightarrow \alpha^2\ln\beta = \beta^2\cdot\ln\alpha \Leftrightarrow \ln\beta^{\alpha^2} = \ln\alpha^{\beta^2} \Leftrightarrow \beta^{\alpha^2} = \alpha^{\beta^2}$$

ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Για x=y=1 η δεδομένη σχέση γίνεται
$f(1) = f(1) + f(1) + \alpha\cdot 0\cdot 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 ισχύει $f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = (1)$

Για κάθε $x_0 \in R^*$ και για κάθε $x \neq x_0$ θέτουμε

$x = x_0\cdot h$ οπότε για $x \to x_0 \Leftrightarrow h \to 1$
Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0\cdot h) - f(x_0)}{x_0\cdot h - x_0} =$$

$$\frac{f(x_0) + f(h) + \alpha(x_0 - 1)(h - 1) - f(x_0)}{x_0(h - 1)} =$$

$$\frac{f(h)}{x_0(h-1)} + \frac{\alpha(x_0 - 1)(h - 1)}{x_0(h - 1)} = \frac{1}{x_0}\cdot\frac{f(h)}{h-1} + \frac{\alpha(x_0 - 1)}{x_0} =$$

$$\frac{1}{x_0}\cdot\left[\frac{f(h)}{h-1} + \alpha(x_0 - 1)\right]$$

Οπότε $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x_0}\cdot\left[\lim_{h\to 1}\frac{f(h)}{h-1} + \alpha(x_0 - 1)\right] =$

$$= \frac{1}{x_0}\cdot\left(f'(1) + \alpha(x_0 - 1)\right)$$

δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in R^*$ και $f'(x) = \frac{1}{x}\left[f'(1) + \alpha(x - 1)\right]$

Παρατήρηση
Εάν η υπόθεση ήταν ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in R^*$ και ζητούσε την

f'(x) τότε η λύση θα ήταν η εξής:
Παραγωγίζουμε την δεδομένη σχέση ως προς y και έχουμε
$f'(xy)\cdot x = f'(y) + \alpha(x-1)$

Για y=1: $f'(x)\cdot x = f'(1) + \alpha(x-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}\cdot\left(f'(1) + \alpha(x-1)\right)$

Παρατηρώ ότι το αποτέλεσμα είναι το ίδιο!!!

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Γ. ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον **ΠΕΙΡΑΙΑ**